第 13 卷第 5 期
2014 年 10 月

江 南 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
Journal of Jiangnan University(Natural Science Edition)

Vol. 13 No. 5
Oct. 2014

# 不确定时变时滞系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制

徐培培， 屈百达*
(江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室，江苏 无锡 214122)

**摘　要**：针对不确定时滞系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制器设计问题，设计了一种有记忆鲁棒 $H_\infty$ 控制器，通过构造一种新型 Lyapunov-Krasovskii 函数，获得基于线性矩阵不等式的时滞相关鲁棒稳定性分析及其鲁棒 $H_\infty$ 控制器的设计方法，从而得到闭环系统渐近稳定且满足给定 $H_\infty$ 扰动抑制水平的 $r$ 的时滞相关条件，通过改进的锥补线性化迭代算法给出一种具有低保守型的控制器设计方法，通过仿真实例说明了该方法的有效性。

**关键词**：不确定时滞系统；鲁棒 $H_\infty$ 控制器；Lyapunov-Krasovskii 函数；线性矩阵不等式；锥补线性化迭代算法

**中图分类号**：TP 273　**文献标志码**：A　**文章编号**：1671－7147(2014)05－0551－07

# Robust $H_\infty$ Control for Uncertain Time-Varying Delay Systems

XU Peipei， QU Baida*
(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry，Ministry of Education，Jiangnan University， Wuxi 214122，China)

**Abstract**：This paper deals with the design of the robust $H_\infty$ controller for uncertain time-varying delay systems. By taking a new Lyapunov-Krasovskii function，we analyze the robust stability about delay-dependent and design a robust $H_\infty$ controller based on the linear matrix inequalities. So the closed-loop system is asymptotically stable，and satisfies the given $H_\infty$ disturbances rejection level of the delay-dependent conditions. Then a class of low conservative controllers based on an improved cone complementary linearization algorithm can be designed. Finally，a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the design approach.

**Key words**：uncertain time-varying delay systems，robust $H_\infty$ controller，Lyapunov-Krasovskii functional，linear matrix inequalities，cone complementarity linearization algorithm

不确定和时滞现象的普遍存在，使得系统的分析和综合变得更加复杂和困难，这是影响系统不稳定的主要因素。因此，对不确定时滞系统稳定性进行分析，设计一个理想的控制器在理论和实际中具有要的意义[1-4]。同时，系统在存在外界干扰影响时，用 $H_\infty$ 性能来描述扰动输入对控制输入的影响，以此反应系统抗外界干扰的能力，不确定时滞系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制得到许多学者的关注，并取得了一定成果[5-7]。

文献[6]通过新的 Lyapunov 方程对时滞系统

---

收稿日期：2014－03－14； 修订日期：2014－04－20。

基金项目：高等学校学科创新引智计划项目(B12018)；江苏高校优势学科建设工程项目(PAPD)；江苏省产学研联合创新项目(120767)。

作者简介：徐培培(1986—)，男，安徽宿州人，控制理论与控制工程专业硕士研究生。

* 通信作者：屈百达(1956—)男，辽宁北镇人，教授，博士生导师。主要从事现代控制技术与应用、模式识别与数据处理等研究。Email：qbd518@yahoo.com.cn

给出一种时滞相关稳定性结论;文献[7]针对一类状态时滞区间的下限不为零时的区间时滞系统,基于Lyapunov方程和凸优化方程得到系统的稳定条件;文献[8]对不确定时变时滞系统的鲁棒$H_\infty$非脆弱控制进行研究,假设不确定性满足一定匹配条件,但在实际系统中不确定项只具有数值界形式而往往不满足匹配条件;文献[9]对状态和输入具有相同不确定时滞的系统进行控制器研究,文献[10]对文献[9]的结果进行扩展,得出了一种针对状态和输入时滞不同时的无记忆鲁棒$H_\infty$控制器的设计;文献[11]基于连续增益故障模式,利用线性矩阵不等式推导了系统$H_\infty$指标约束下鲁棒容错镇定的充要条件;WANG Cheng[12]等把自由权矩阵引入到随机型不确定时滞系统的非脆弱保性能控制的研究中,给出基于LMI不等式优化方法的非脆弱保性能控制器的设计方法。但由于所选取的Lyapunov泛函过于简单,从而导致所设计的控制器保守性较大。

以往的鲁棒$H_\infty$控制器大多都是无记忆控制器,文中研究了状态和控制项中均含有时滞的有记忆控制情形,并通过LMI的变换得到具有保守性的效果。另外,通过采用改进的锥补线性迭代法给出控制器的求解算法,通过Matlab工具箱的仿真得出设计方法的有效性。

## 1 系统描述

考虑如下时变时滞系统:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= ((\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t))\boldsymbol{x}(t)+\\&(\boldsymbol{A}_1+\Delta\boldsymbol{A}_1(t))\boldsymbol{x}(t-d(t))+\\&(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B}(t))\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}(t)),\\ z(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{u}(t)\end{aligned}\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$,$\boldsymbol{z}(t)\in R^p$,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$和$\boldsymbol{w}(t)\in R^n$分别为被控对象的状态向量、被调输出向量、控制输入向量和系统的有限外部扰动向量,且有$\boldsymbol{w}(t)\in[0,\infty)$;$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B},\boldsymbol{G},\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}_1$是维数适当的已知定常矩阵,$d(t)$是系统的状态时变时滞,是一个有界的可微函数,满足$0<d(t)<d_m$,$\dot{d}(t)<\mu_1<1$,$d_m$,$\mu_1$是已知的常数,$\Delta\boldsymbol{A}$,$\Delta\boldsymbol{A}_1$,$\Delta\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{B}$的不确定部分并满足如下的匹配条件:

$$[\Delta\boldsymbol{A}(t),\Delta\boldsymbol{A}_1(t),\Delta\boldsymbol{B}(t)]=\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3]\tag{2}$$

其中$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$是具有适当维数的已知矩阵,$\boldsymbol{F}(t)$是时变的且具有Lebesgue的未知实值矩阵,满足$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{I}$为相应维数的单位矩阵。

考虑系统(1)的性能指标为

$$\boldsymbol{J}=\int_0^\infty[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)]\,\mathrm{d}t$$

文中将针对系统(1)设计一个有记忆状态反馈控制器:

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\tag{3}$$

其中$\tau(t)$为控制器中的状态时滞,是一个有界的可微函数,满足$0<\tau(t)<\tau_m$,$\dot{\tau}<\mu_2<1$,$\tau_m$,$u_2$是已知的常数,系统的初始条件为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),t\in[-\bar{d},0]\quad \bar{d}=\max(d_m,\tau_m)$$

式中$\varphi(t)$是初始函数,在$t\in[-\bar{d},0]$上是连续函数,将控制器作用于系统(1)可得到闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_1\boldsymbol{x}(t-d(t))+\\&\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))+\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}(t),\\ z(t) &= \bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),\\ \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t),t\in[-\bar{d},0],\bar{d}=\max\{d_m,\tau_m\}\end{aligned}\tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\Delta\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{K}_1,\\ \bar{\boldsymbol{A}}_1 &= \boldsymbol{A}_1+\Delta\boldsymbol{A}_1(t),\\ \bar{\boldsymbol{B}} &= (\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B}(t))\boldsymbol{K}_2,\\ \bar{\boldsymbol{C}} &= \boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_1\end{aligned}$$

文中的主要目的是设计控制器(3),使得闭环系统满足:

1)系统内稳定,即在当外界干扰$w(t)=0$的情况下,系统渐近稳定。

2)在初始状态下,被调输出和外部扰动向量满足$H_\infty$范数的约束条件:存在任意给定的干扰衰减指标$\gamma>0$使得

$$\|\boldsymbol{T}_{WZ}(s)\|\leqslant\gamma,\text{即}\ \|\boldsymbol{z}\|_2\leqslant\gamma\|\boldsymbol{w}\|_2。$$

**引理1**[13] 对于任意的正定对称矩阵$Q$和标量$d>0$及失量函数$\boldsymbol{\omega}(s)$:$[0,d]\to\boldsymbol{R}^n$,则下列矩阵不等式成立:

$$\left(\int_0^d\boldsymbol{\omega}(s)\,\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\left(\int_0^d\boldsymbol{\omega}(s)\,\mathrm{d}s\right)\leqslant d\left(\int_0^d\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\omega}(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

**引理2**[14] 给定的适当维数的对称矩阵$\boldsymbol{T}$和矩阵$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{N}$,对任意满足$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$的对称矩阵$\boldsymbol{F}(t)$,使得$\boldsymbol{T}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}<0$的充分必要条件是存在一个标量$\varepsilon>0$,满足

$$\boldsymbol{T}+\varepsilon\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}<0。$$

## 2 主要结论

**定理1** 给定$\gamma>0$,标量$\varepsilon>0$,若存在适当维数的

正定对称矩阵 $P,Q_i,Z_i,i=1,2$ 满足如下矩阵不等式成立：

$$\Xi=\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & PG & (A+BK_1)^{\mathrm T}Z_1 & (A+BK_1)^{\mathrm T}Z_2 & PD & (E_1+E_3K_1)^{\mathrm T} & (C+C_1K_1)^{\mathrm T} \\ * & \Pi_4 & 0 & 0 & A_1^{\mathrm T}Z_1 & A_1^{\mathrm T}Z_2 & 0 & E_2^{\mathrm T} & 0 \\ * & * & \Pi_5 & 0 & K_2^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Z_1 & K_2^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Z_2 & 0 & (E_3K_2)^{\mathrm T} & (C_1K_2)^{\mathrm T} \\ * & * & * & -\gamma^2 & G^{\mathrm T}Z_1 & G^{\mathrm T}Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Z_1/d_m & 0 & Z_1^{\mathrm T}D & 0 & 0 \\ - & * & * & * & * & -Z_2/\tau_m & Z_2^{\mathrm T}D & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon^{-1}I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}<0 \quad (5)$$

其中

$$\Pi_1=PA+A^{\mathrm T}P+PBK_1+K_1^{\mathrm T}B^{\mathrm T}P+\frac{1}{1-\mu_1}Q_1+\frac{1}{1-\mu_2}Q_2+\frac{1}{d_m}Z_1+\frac{1}{\tau_m}Z_2,$$

$$\Pi_2=PA_1+\frac{1}{d_m}Z_1,\Pi_3=PBK_2+\frac{1}{\tau_m}Z_2,$$

$$\Pi_4=-Q_1-\frac{1}{d_m}Z_1,\Pi_5=-Q_2-\frac{1}{\tau_m}Z_2$$

则由状态反馈控制器(3) 所得到的闭环系统(4) 是渐近稳定的，并且具有 $H_\infty$ 性能指标 $\gamma$。* 表示对称位置元素的转置。

证　构造如下 Lyapunov 泛函：

$$V(x_t)=x^{\mathrm T}(t)Px(t)+\frac{1}{1-\mu_1}\int_{t-d_t}^{t}x^{\mathrm T}(s)Q_1x(s)\mathrm ds+\frac{1}{1-\mu_2}\int_{t-\tau_t}^{t}x^{\mathrm T}(s)Q_2x(s)\mathrm ds+\int_{t-d_m}^{t}(s-(t-d_m))\dot x^{\mathrm T}(s)Z_1\dot x(s)\mathrm ds+\int_{t-\tau_m}^{t}(s-(t-\tau_m))\dot x^{\mathrm T}(s)Z_2\dot x(s)\mathrm ds \quad (6)$$

其中，$x_t=x(t+\theta)$，$-2\bar d<\theta<0$，当有界的外部干扰向量 $w(t)=0$ 时，沿着系统闭环系统(4) 对式(6) 进行求导得

$$\begin{aligned}\dot V(x_t)={}&2x^{\mathrm T}(t)P\dot x(t)+\frac{1}{1-\mu_1}x^{\mathrm T}(t)Q_1x(t)-\frac{1}{1-\mu_1}(1-\dot d_t)x^{\mathrm T}(t-d(t))Q_1x(t-d(t))+\\&\frac{1}{1-\mu_2}x^{\mathrm T}(t)Q_2x(t)-\frac{1}{1-\mu_2}(1-\dot\tau_t)x^{\mathrm T}(t-d(t))Q_2x(t-d(t))+d_m\dot x^{\mathrm T}(t)Z_1\dot x(t)+\\&\tau_m\dot x^{\mathrm T}(t)Z_2\dot x(t)-\int_{t-d_m}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z_1\dot x(s)\mathrm ds-\int_{t-\tau_m}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z_2\dot x(s)\mathrm ds<2x^{\mathrm T}(t)P\dot x(t)+\\&\frac{1}{1-\mu_1}x^{\mathrm T}(t)Q_1x(t)-x^{\mathrm T}(t-d(t))Q_1x(t-d(t))+\\&\frac{1}{1-\mu_2}x^{\mathrm T}(t)Q_2x(t)-x^{\mathrm T}(t-d(t))Q_2x(t-d(t))+\\&d_m\dot x^{\mathrm T}(t)Z_1\dot x(t)+\tau_m\dot x^{\mathrm T}(t)Z_2\dot x(t)-\\&\int_{t-d(t)}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z_1\dot x(s)\mathrm ds-\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z_2\dot x(s)\mathrm ds\end{aligned} \quad (7)$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned}&-\int_{t-d(t)}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z_1\dot x(s)\mathrm ds<\frac{1}{d_m}(x(t)-x(t-d(t)))^{\mathrm T}Z_1(x(t)-x(t-d(t)))-\\&\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z_2\dot x(s)\mathrm ds<\frac{1}{\tau_m}(x(t)-x(t-\tau(t)))^{\mathrm T}Z_2(x(t)-x(t-\tau(t)))\end{aligned} \quad (8)$$

将式(8) 带入式(7)，在带入 $\bar A$，$\bar A_1$，$\bar B$ 的情况下，要使 $\dot V(t)<0$，由 Schur 补引理知须满足下式成立：

$$\bar\Gamma+\begin{bmatrix} PD \\ 0 \\ 0 \\ Z_1D \\ Z_2D \end{bmatrix}F(t)\begin{bmatrix} (E_1+E_3K_1)^{\mathrm T} \\ E_2^{\mathrm T} \\ (E_3K_2)^{\mathrm T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (E_1+E_3K_1)^{\mathrm T} \\ E_2^{\mathrm T} \\ (E_3K_2)^{\mathrm T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)\begin{bmatrix} PD \\ 0 \\ 0 \\ Z_1D \\ Z_2D \end{bmatrix}^{\mathrm T}<0$$

其中

$$\bar\Gamma=\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & (A+BK_1)^{\mathrm T}Z_1 & (A+BK_1)^{\mathrm T}Z_2 \\ * & \Pi_4 & 0 & A_1^{\mathrm T}Z_1 & A_1^{\mathrm T}Z_2 \\ * & * & \Pi_5 & K_2^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Z_1 & K_2^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Z_2 \\ * & * & * & -Z_1/d_m & 0 \\ * & * & * & * & -Z_2/\tau_m \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\Pi}_1,\boldsymbol{\Pi}_2,\boldsymbol{\Pi}_3,\boldsymbol{\Pi}_4,\boldsymbol{\Pi}_5$ 定义同式(5)。

根据引理2存在任意一个标量常数 $\varepsilon$ 满足

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}+\varepsilon\begin{bmatrix}\boldsymbol{PD}\\0\\0\\\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{PD}\\0\\0\\\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{D}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+$$

$$\varepsilon^{-1}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K}_1)^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K}_2)^{\mathrm{T}}\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K}_1)^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K}_2)^{\mathrm{T}}\\0\\0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}<0$$

再由Schur补,结合定理(1)得到 $\dot{V}(x_t)<0$,根据Lyapunov稳定性理论可知,闭环系统(4)是内部渐近稳定的,而当 $w(t)\neq 0$ 时,引入函数

$$J=\int_0^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t)]\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_0^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t)+$$

$$\dot{V}(x_t)]\,\mathrm{d}t+V(0)-V(\infty)$$

在零初始条件可知 $V(0)=0,V(\infty)>0$ 所以有

$$J\leqslant\int_0^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t)+\dot{V}(x_t)]\,\mathrm{d}t$$

其中

$$z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma w^{\mathrm{T}}(t)w(t)+\dot{V}(x_t)<$$

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\left(\boldsymbol{\Gamma}_1+d_m\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\\\bar{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}\\\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\\\bar{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}\\\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\tau_m\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\\\bar{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}\\\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{Z}_2\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\\\bar{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}\\\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\\0\\(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{K}_2)^{\mathrm{T}}\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{Z}_2\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\\0\\(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{K}_2)^{\mathrm{T}}\\0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\eta}(t)$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}&\boldsymbol{G}_1\\ *&-\gamma^2\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_1=[\boldsymbol{PG}\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\quad\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$$

由引理(2)可以得到定理(1)成立,故得到

$$z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma w^{\mathrm{T}}(t)w(t)+\dot{V}(x_t)<0$$

从而可得

$$J\leqslant\int_0^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t)]\,\mathrm{d}t<0$$

因此有满足 $H_\infty$ 范数的约束条件:存在任意给定的干扰衰减指标 $\gamma>0$ 使得

$$\|\boldsymbol{T}_{WZ}(s)\|\leqslant\gamma,$$

即 $$\|z\|_2\leqslant\gamma\|\boldsymbol{w}\|_2$$

定理1得证。

**定理2** 对给定的 $\gamma>0$,如果存在适维正定对称矩阵 $\bar{P},\bar{Q}_i,\bar{Z}_i,i=1,2$ 及矩阵 $Y_1,Y_2$,以及标量 $\varepsilon>0$,使得

$$\begin{bmatrix}
\hat{\boldsymbol{\Pi}}_1 & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_2 & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_3 & \boldsymbol{G} & \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \varepsilon\boldsymbol{D} & \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\\
* & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_4 & 0 & 0 & \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} & 0 & \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & 0\\
* & * & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_5 & 0 & \boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\\
* & * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & -(\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{Z}}_1^{-1}\bar{\boldsymbol{P}})/d_m & 0 & \varepsilon\boldsymbol{D} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -(\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{Z}}_2^{-1}\bar{\boldsymbol{P}})/\tau_m & \varepsilon\boldsymbol{D} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I}
\end{bmatrix}<0 \quad (9)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_1=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{P}}+\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BY}_1+\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{1-\mu_1}\bar{\boldsymbol{Q}}_1+$$

$$\frac{1}{1-\mu_2}\bar{\boldsymbol{Q}}_2+\frac{1}{d_m}\bar{\boldsymbol{Z}}_1+\frac{1}{\tau_m}\bar{\boldsymbol{Z}}_2,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_2=\boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{P}}+\frac{1}{d_m}\bar{\boldsymbol{Z}}_1,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_3=\boldsymbol{BY}_2+\frac{1}{\tau_m}\bar{\boldsymbol{Z}}_2,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_4=-\bar{\boldsymbol{Q}}_1-\frac{1}{d_m}\bar{\boldsymbol{Z}}_1,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_5=-\bar{\boldsymbol{Q}}_2-\frac{1}{\tau_m}\bar{\boldsymbol{Z}}_2$$

则系统(1)存在有记忆的 $\gamma$-次优状态反馈 $H_\infty$ 控制率,可以知道控制增益为 $K_1=\boldsymbol{Y}_1\bar{\boldsymbol{P}}^{-1},\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{Y}_2\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}$,即控制器为

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{Y}_1\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{Y}_2\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\quad(10)$$

证　由定理(1)可知，对式(5)的左右两边都乘以

$$\mathrm{diag}\{P^{-1}\quad P^{-1}\quad P^{-1}\quad I\quad Z_1^{-1}\quad Z_2^{-1}\quad I\quad I\quad I\}$$

并在所得结果中令 $\bar{P}=P^{-1}$，$Y_1=K_1P^{-1}$，$Y_2=K_2P^{-1}$，$\bar{Q}_i=P^{-1}Q_iP^{-1}$，$\bar{Z}_i=P^{-1}Z_iP^{-1}$，$i=1,2$，可以得式(9)成立。

但是在式(9)中，$(\bar{P}\bar{Z}_1^{-1}\bar{P})/d_m$ 和 $(\bar{P}\bar{Z}_2^{-1}\bar{P})/\tau_m$ 存在非线性项，从而导致在求解的过程中无法利用凸优化算法求解控制器的增益，如果限制 $\bar{P}=\bar{Z}_1=\bar{Z}_2$，则可知此时式(9)变成线性矩阵不等式，可以利用 LMI 工具箱直接求解控制器增益。由于在 Lyapunov 泛函中引入了带有系数 $1/(1-\mu_i)$，$i=1,2$ 的一次积分项，所以相对于文献[8]具有较小的保守性。

针对以上的非线性项可以用改进的锥补线性化迭代算法来处理[10]，从而可以得到控制器增益 $K_1$，$K_2$ 的值。定义适维矩阵 $S_1$，$S_2$ 使得 $S_1<\bar{P}\bar{Z}_1^{-1}\bar{P}$，$S_2<\bar{P}\bar{Z}_2^{-1}\bar{P}$，故不等式(9)可以用如下的不等式组代替：

$$\begin{bmatrix}
\hat{\Pi}_1 & \hat{\Pi}_2 & \hat{\Pi}_3 & G & \bar{P}A^{\mathrm{T}}+Y_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & \bar{P}A^{\mathrm{T}}+Y_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & \varepsilon D & \bar{P}E_1^{\mathrm{T}}+Y_1^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & \bar{P}C^{\mathrm{T}}+Y_1^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}} \\
* & \hat{\Pi}_4 & 0 & 0 & \bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & \bar{P}A_1^{\mathrm{T}} & 0 & \bar{P}E_2^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & \hat{\Pi}_5 & 0 & Y_2^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & Y_2^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & 0 & Y_2^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & Y_2^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}} \\
* & * & * & -\gamma^2 I & G^{\mathrm{T}} & G^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -S_1/d_m & 0 & \varepsilon D & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -S_2/\tau_m & \varepsilon D & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -I
\end{bmatrix}<0 \qquad (11)$$

$$\bar{P}\bar{Z}_1^{-1}\bar{P}\geqslant S_1\quad \bar{P}\bar{Z}_2^{-1}\bar{P}\geqslant S_2 \qquad (12)$$

不等式中 $\hat{\Pi}_1$，$\hat{\Pi}_2$，$\hat{\Pi}_3$，$\hat{\Pi}_4$，$\hat{\Pi}_5$ 和式(9)中定义相同。

由 Schur 补引理，式(12)等价于

$$\begin{bmatrix} S_1^{-1} & \bar{P}^{-1} \\ \bar{P}^{-1} & \bar{Z}_1^{-1} \end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix} S_2^{-1} & \bar{P}^{-1} \\ \bar{P}^{-1} & \bar{Z}_2^{-1} \end{bmatrix}\geqslant 0 \qquad (13)$$

令 $T_i=S_i^{-1}$，$J=\bar{P}^{-1}$，$R_i=\bar{Z}_i^{-1}$，$i=1,2$，式(13)可表示为

$$\begin{bmatrix} T_1 & J \\ J & R_1 \end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix} T_2 & J \\ J & R_2 \end{bmatrix}\geqslant 0 \qquad (14)$$

利用锥补线性化迭代方法可以将非线性不等式(11)的求解转化为如下非线性最小化问题：

$$\text{Minimize } \mathrm{tr}\{\sum_{i=1}^{2} T_iS_i+J\bar{P}+R_i\bar{Z}_i\} \qquad (15)$$

Subject to 式(11)以及 $\bar{P}>0$，$Q_i>0$，$Z_i>0$

$$\begin{bmatrix} T_i & J \\ J & R_i \end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix} S_i & J \\ J & T_i \end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & J \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}_i & I \\ I & R_i \end{bmatrix}\geqslant 0,i=1,2 \qquad (16)$$

当上述最小化问题的解为 $5n$，则系统(1)在控制器(10)的作用下是渐近稳定的且满足给定的 $H_\infty$ 扰动抑制度 $\gamma$。

采用的算法步骤如下，给定 $\gamma$，$\tau_m$ 最大化 $d_m$：

1）给定 $\gamma$，$\tau_m$ 初值，并使其满足式(11)。

2）找出一组满足不等式(11)的可行解($\bar{P}^1$，$Y_i^1$，$\bar{Q}_i^1$，$\bar{Z}_i^1$，$S_i^1$，$J^1$，$T_i^1$，$R_i^1$)，$i=1,2$，设 $k=1$。

3）对矩阵变量($\bar{P}$，$Y_i$，$\bar{Q}_i$，$\bar{Z}_i$，$S_i$，$J$，$T_i$，$R_i$)解如下最小化问题：

Minimize Tr

$$(\bar{P}^kJ+J^k\bar{P}+\sum_{i=1}^{2}(T_i^kS_i+S_i^kT_i+R_i^kZ_i+Z_i^kR_i))$$

Subject to(11)

使得

$$\bar{P}^{k+1}=\bar{P},J^{k+1}=J,T_i^{k+1}=T_i,S_i^{k+1}=S_i,$$
$$R_i^{k+1}=R_i,Z_i^{k+1}=Z_i,i=1,2$$

4）对于步骤3）所得到的控制器增益 $K_1$，$K_2$，如果不等式矩阵(9)满足，则适当地增大 $d_m$，并回到步骤2），如果所得控制器不能使式(9)满足，并超出了设定的迭代次数，则终止程序，否则让 $k=k+1$ 返回到步骤3）。

注释：在此以矩阵不等式(9)作为循环的终止条件并没有求 $\mathrm{tr}\{\sum_{i=1}^{2}T_iS_i+J\bar{P}+R_i\bar{Z}_i\}$ 的值精确地等于 $5n$，这样对于给定的 $\gamma$ 只能得到次优的时滞上界 $d_m$。即便如此，通过数值仿真可知，其仍具有较小

的保守性。

## 3　算例仿真

考虑形式如式(1)的不确定时变时滞系统，其中参数假定为

$$A=\begin{bmatrix}0.3 & 0.1\\ -0.6 & 1.0\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ -0.1 & 0.2\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0.41 & 0.12\\ 0.11 & 0.62\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ -0.1 & 0.2\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0.05 & 0.31\\ 0.20 & 0.11\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$E_1=\begin{bmatrix}0.02 & 0.11\\ 0.15 & 0.22\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}0.12 & 0.13\\ 0.21 & 0.14\end{bmatrix},$$

$$E_3=\begin{bmatrix}0.08 & 0.11\\ 0.09 & 0.05\end{bmatrix},F(t)=\begin{bmatrix}\sin(t) & 0\\ 0 & \cos(t)\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}0.21 & 0.37\\ -0.1 & 0.60\end{bmatrix}$$

根据定理2，对于给定$\tau_m=0.1$，$\mu_1=0.35$，$\mu_2=0.4$，当$\gamma=1$时有改进的锥补迭代算法并利用LMI工具箱经过55次迭代可得一控制器为

$$u(t)=\begin{bmatrix}-3.1004 & 0.5731\\ 1.6388 & -3.2372\end{bmatrix}x(t)+$$

$$10^{-3}\begin{bmatrix}-0.1299 & 0.0758\\ 0.0723 & -0.0668\end{bmatrix}x(t-\tau(t))$$

并得到相应的时滞上界$d_m=1.130$，相对于文献[5]在状态和输入情况下具有较好的保守性。

在假设系统的初始状态为$[2\quad -3]^{\mathrm{T}}$，外部扰动为

$$w(t)=\begin{cases}1 & 5s\leqslant t\leqslant 6s\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

的脉冲信号时，有Matlab仿真得闭环系统的状态响应效果如图1所示。

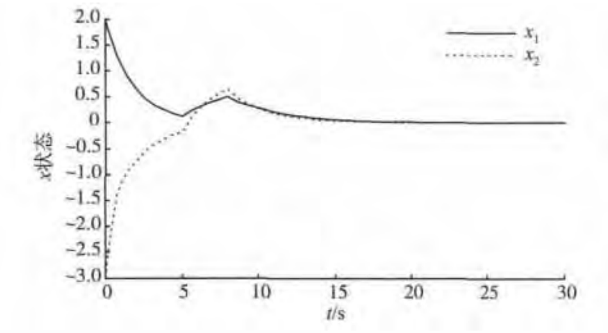

图1　状态$x_1$，$x_2$响应曲线

Fig. 1　Response curve of states $x_1$，and $x_2$

图1是具有外部干扰时状态$x_1$和$x_2$的响应曲线，可知系统在具有外部干扰的情况下仍能保持渐进稳定，说明该方法有效。

## 4　结　语

针对不确定时变时滞系统基于Lyapunov稳定性理论，结合LMI方法，并有ICCL算法的基础下，给出一种具有低保守型的有记忆控制器的设计方法，并且通过仿真结果表明该控制器具有较好的稳定性效果。由于工程系统中不可避免的不确定性和时滞现象，使得不确定线性时滞系统的鲁棒$H_\infty$控制具有很大的理论意义和工程价值，故文中的设计具有一定实际意义。

## 参考文献(References)：

[1] ZHANG Tao，CUI Yanqiu. State observer and robust control for uncertain systems with tome-varying state delay[J]. Automation，2008，5(8)：5580-5584.

[2] LI Hongyi，CHEN Bing，ZHOU Qi，et al. New results on delay-dependent robust stability of uncertain time delay systems[J]. International Journal of Systems Science，2010，41(6)：627-634.

[3] WANG Cheng，SHEN Yi. Improved delay-dependent robust stability criteria for uncertain time delay systems[J]. Applied Mathematics and Computation，2011，218：2880-2888.

[4] 肖申平，吴敏. 线性时滞系统的时滞相关鲁棒稳定性新判据[J]. 控制与决，2008，23(1)：110-113.
XIAO Shenping，WU Min. New delay-dependent robust stability criteria for linear systems with time-delay[J]. Control and Decision，2008，23(1)：110-113.(in Chinese)

[5] PENG Chen，TIAN Yuchu. Delay-dependent robust $H_\infty$ control for uncertain systems with time-varying delay[J]. Information Sciences，2009，179(18)：3187-3197.

[6] SHAO Hanyong. New delay-stability criteria for systems with interval delay [J]. Automatica, 2009, 45(3): 744-479.

[7] TIAN Engang, YUE Dong, ZHANG Yijun. On improved delay-dependent robust $H_\infty$ control for systems with interval time-varying delay [J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348(4): 555-567.

[8] **罗跃生，董晓璋，孙明丽. 不确定变时滞系统的鲁棒非脆弱 $H_\infty$ 控制 [J]. 控制工程**，2008，15(3)：265-268.

LUO Yuesheng, DONG Xiaozhang, SUN Mingli. Robust non-fragile $H_\infty$ control for uncertain time-varying delay systems [J]. Control Engineering of China, 2008, 15(3): 265-268. (in Chinese)

[9] WANG Y, ZUO Y, HUANG L, et al. A new delay-dependent $H$-infinity control criterion for a class of discrete-time system with time-varying state delays and input delays [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 2008, 222(18): 863-874.

[10] **陈刚，阳春华，朱红求. 考虑时延与丢包的网络控制系统分析与综合 [J]. 系统工程与电子技术**，2012，34(2)：342-347.

CHEN Guan, YANG Chunhua, ZHU Hongqiu. Analysis and synthesis for networked control systems with network-induced delay and data dropout problems [J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(2): 342-347. (in Chinese)

[11] **陈明，童朝南. 不确定系统鲁棒容错 $H_\infty$ 控制的** LMI **设计方法 [J]. 控制与决策**，2009，24(4)：526-532.

CHEN Min, TONG Chaonan. LMI approach to rohust fault-tolercmt $H_\infty$ control for uncertain system [J]. Control and Decision, 2009, 24(4): 526-532. (in Chinese)

[12] CHENG Wang, YI Shen. Delay-dependent non-fragile robust stabilization and $H_\infty$ control of uncertain stochastic systems with time-varying delay and non linearity [J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348(8): 2174-2190.

[13] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems [C] //Proceedings of 39th IEEE conference on decision and control. Sydney, Australia: [s. n.], 2000: 2805-2810.

[14] Petersen I R, Hollot C V. A riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems [J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-411.

[15] Alpaslan Parlakci M N, Ibrahib B Kucukdemiral. Robust delay-dependent $H_\infty$ control of time-delay systems with state and input delays [J]. Int J Robust Nonlinear Control, 2011, 21: 974-1007.

（责任编辑：杨　勇）